UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 5
Soluciones
Gustavo Lau
2021-06-12

Definiciones

Definición de relación reflexiva.

$$R \text{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A\ ((a,a) \in R)$$

Definición de relación transitiva.

$$R \text{ es transitiva en } A \equiv \forall a,b,c \in A\ ((a,b) \in R \land (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

Definición de relación antisimétrica.

$$R \text{ es antisimétrica en } A \equiv \forall a,b \in A\ ((a,b) \in R \land (b,a) \in R \implies a = b)$$

1. Sean R y S dos relaciones sobre A. De las siguientes afirmaciones determine cuáles son ciertas o falsas. Para las falsas de un contraejemplo y para las verdaderas dar una demostración.

   a) Si R es reflexiva en A, entonces R^{-1} es reflexiva en A

   b) Si R es antisimétrica en A, entonces R^{-1} es antisimétrica en A

   c) Si R es transitiva en A, entonces R^{-1} es transitiva en A

   Respuesta

   a) Verdadera

   Intuitivamente: Si en una relación reflexiva volteamos los pares (voltemos las flechas en su grafo) obtenemos una relación reflexiva.

$$\begin{array}{ll} & R \text{ es reflexiva en } A \\ \equiv & \langle \text{definición de relación reflexiva} \rangle \\ & \forall a \in A\ ((a,a) \in R) \\ \implies & \langle \text{definición de relación inversa} \rangle \\ & \forall a \in A\ ((a,a) \in R^{-1}) \\ \equiv & \langle \text{definición de relación reflexiva} \rangle \\ & R^{-1} \text{ es reflexiva en } A \end{array}$$

■

b) Verdadera

Intuitivamente: Ejemplos de antisimétrica: $\leq$, $\geq$. Propiedad antisimétrica: en el grafo no hay arcos de ida y vuelta entre dos nodos. La definición de relación antisimétrica es simétrica (a y b se pueden intercambiar).

Supongamos que R es antisimétrica en A. Es decir:

$$\forall a, b \in A\ ((a,b) \in R \land (b,a) \in R \implies a = b)$$

$$\begin{aligned}
& (a,b) \in R^{-1} \land (b,a) \in R^{-1} \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación inversa} \rangle \\
& (b,a) \in R \land (a,b) \in R \\
\implies & \langle \land \text{ es conmutativa y definición de relación antisimétrica} \rangle \\
& a = b
\end{aligned}$$

$\therefore \forall a, b \in A\ (a,b) \in R^{-1} \land (b,a) \in R^{-1} \implies a = b$

$\therefore R^{-1}$ es antisimétrica en A

$$\therefore R \text{ es antisimétrica en } A \implies R^{-1} \text{ es antisimétrica en } A$$

■

c) Verdadera

Intuitivamente: Si en el grafo de una relación transitiva volteamos todas las flechas seguiremos teniendo la propiedad transitiva.

Supongamos que R es transitiva en A. Es decir:

$$\forall a, b, c \in A\ ((a,b) \in R \land (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

$$\begin{aligned}
& (a,b) \in R^{-1} \land (b,c) \in R^{-1} \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación inversa} \rangle \\
& (b,a) \in R \land (c,b) \in R \\
\implies & \langle \land \text{ es conmutativa y definición de relación transitiva} \rangle \\
& (c,a) \in R \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación inversa} \rangle \\
& (a,c) \in R^{-1}
\end{aligned}$$

$\therefore \forall a, b, c \in A\ ((a,b) \in R^{-1} \land (b,c) \in R^{-1} \implies (a,c) \in R^{-1})$

$\therefore R^{-1}$ es transitiva en A

$$\therefore R \text{ es transitiva en } A \implies R^{-1} \text{ es transitiva en } A$$

■

2. Sean R y S dos relaciones. Demuestre que:

   a) Si R es antisimétrica entonces $R \cap S$ es antisimétrica.

   b) Si R es antisimétrica entonces $R \setminus S$ es antisimétrica.

   Respuesta

   a) Intuitivamente: Si en R ni en S no hay arcos de ida y vuelta entre dos nodos entonces tampoco los hay en $R \cap S$.

   Supongamos que R es antisimétrica en A. Es decir:

$$\forall a, b \in A \ ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \implies a = b)$$

$$\begin{array}{ll} & (a,b) \in R \cap S \wedge (b,a) \in R \cap S \\ \equiv & \langle \text{definición de intersección} \rangle \\ & (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S \wedge (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S \\ \implies & \langle \wedge \text{ es conmutativa y asociativa y R es antisimétrica} \rangle \\ & a = b \end{array}$$

$$\therefore (a,b) \in R \cap S \wedge (b,a) \in R \cap S \implies a = b$$
$$\therefore R \cap S \text{ es antisimétrica en } A$$

$$\therefore R \text{ es antisimétrica en } A \implies R \cap S \text{ es antisimétrica en } A$$

■

   b) Intuitivamente: Si en R ni en S no hay arcos de ida y vuelta entre dos nodos entonces tampoco los hay en $R \setminus S$.

   Supongamos que R es antisimétrica en A. Es decir:

$$\forall a, b \in A \ ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \implies a = b)$$

$$\begin{array}{ll} & (a,b) \in R \setminus S \wedge (b,a) \in R \setminus S \\ \equiv & \langle \text{definición de diferencia de conjuntos} \rangle \\ & (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S \wedge (b,a) \in R \wedge (b,a) \notin S \\ \implies & \langle \wedge \text{ es conmutativa y asociativa y R es antisimétrica} \rangle \\ & a = b \end{array}$$

$$\therefore (a,b) \in R \setminus S \wedge (b,a) \in R \setminus S \implies a = b$$
$$\therefore R \setminus S \text{ es antisimétrica en } A$$

$$\therefore R \text{ es antisimétrica en } A \implies R \setminus S \text{ es antisimétrica en } A$$

■